UDC 001.891.57:53. 519.67

The Model the Effect of the «Stop» Spiral Waves in Theblood Coagulation

[1] Elena Vdovina
[2] Konstantin Volosov

[1-2] Moscow State University of Railway Engineering, Russia
str. Obrazyova, h.9, 9. Moscow, 127994
[1] PhD student
E-mail: lenavek@mail.ru
[2] Dr. (Math.), Professor
E-mail: konstantinvolosov@yandex.ru

Abstract. We find spiral waves in the mathematical models of blood coagulation dynamics. There is description the effect of the <<stop>> the spiral waves.

Keywords: the reaction – diffusion model; blood coagulation; exact solutions of the spiral waves.

Введение. В научной литературе появился цикл работ по математическому моделированию пространственной динамики процесса свёртывания крови [1], [2]. Система уравнений для активатора процесса свертываемости $Q(t,x,y)$ (тромбина) и ингибитора $S(t,x,y)$ в первой распределенной модели [1] с разными коэффициентами диффузии имеет вид

$$Q_t^{'} - d_1\,\Delta Q - \alpha\, Q^2\ /(u_o + Q) + Q(\gamma S + k_1) = 0,$$
$$S_t^{'} - d\ \ \Delta S - \beta\, Q\ \ (1 - S / C_0)(1 + S^2 / v_0^2) + k_2\ S = 0 \qquad (1)$$

Здесь $C_0, v_0, u_0, d, d_1, k_{j,}\, j = 1{,}2$ константы модели.

Функции $Q(t,x,y)$, $S(t,x,y)$- дважды непрерывно дифференцируемые функции независимых переменных. Δ - оператор Лапласа. Численными методами в [1], [2] показано что, важную роль в обсуждаемых процессах играет распространение спиральной волны и её остановка. Систему (1) следует рассматривать в выпуклой области, размер которой много больше характерного размера, на границе которой ставится второе краевое условие для двух функций. Некоторые авторы писали, что нет метода и нет возможности построить точные решения, описывающие спиральные волны в элементарных функциях.

Высказывается также мнение что, используя численные методы можно получить любые эффекты, включая эффекты которые описываются с привлечением аппарата обобщенных функций. В данной работе показано, что в данной задаче присутствуют малые параметры и она является «жесткой», но решение может быть описано классическими функциями.

Точное решение позволяет выяснить зависимость поведения и его свойства от параметров задачи, проанализировать качественные эффекты. Для того чтобы получить аналогичные данные используя численные методы требуются значительные затраты труда и ресурсов. Одно точное решение позволяет получить информации больше, чем десятки вариантов численных расчетов. Причём этот перевес в пользу точных решений увеличивается с увеличением числа переменных, нелинейности и сложности задачи.

Построение спиральных волн. Система уравнений (1) переписывается в медленно вращающейся системе полярных координат

$Q(t,x,y) = K(\chi,\theta),\ S(t,x,y) = H(\chi,\theta),$ где $\chi = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = arctg\,(y/x) - \omega t.$

Тогда $\Delta K(\chi,\theta) = (K_{\theta\theta}^{''} + K_{\chi\chi}^{''})\exp(-2\chi) = \exp(-2\chi)\,\widehat{\Delta}\, K(\chi,\theta).$

$$-\omega K_\theta^{'}\exp(2\chi) - d_1\widehat{\Delta} K(\chi,\theta) - \exp(-2\chi)\,\alpha\, K^2/(u_0 + K) + K(\gamma H + k_1)\exp(2\chi) = 0,$$
$$-\omega H_\theta^{'}\exp(2\chi) - d\ \widehat{\Delta} H(\chi,\theta) - \exp(-2\chi)\,\beta\, K(1 - H/C_0)\,(1 + H^2/v_0^2)\exp(2\chi) +$$
$$+ k_2\, H\exp(2\chi) = 0. \qquad (2)$$

Для построения точного решения используется метод «плавающей» нефиксированной конструктивной замены переменных (МНФКЗП) предложенный в [3]- [5]. Этот способ позволяет найти сложные «дифференциальные связи», которые следуют из внутренней структуры уравнений и на их базе построить точные решения в неявной параметрической форме. Простые «дифференциальные связи» – соотношения между функциями и производными просто отбрасываются, так как они ведут к тривиальным группам преобразования и связанным с ними решениям, которые обычно исследуются классическим групповым анализом. МНФКЗП построены новые спиральные структуры в задаче о динамике системы распределенного открытого гиперцикла размерности два [5]. В этой работе впервые аналитически описан эффект коллективного «локального» вращения многих спиральных структур. Ранее этот эффект моделировался на суперкомпьютере с большой затратой сил и ресурсов. Разработанная в [5] техника позволяет строить спиральные структуры с различным топологическим зарядом (с несколькими рукавами). Делаем «плавающую», нефиксированную замену переменных

$$K(\chi,\theta)\Big|_{\theta=\theta(\xi,\delta),\chi=\chi(\xi,\delta)}=U(\xi,\delta),\quad H(\chi,\theta)\Big|_{\theta=\theta(\xi,\delta),\chi=\chi(\xi,\delta)}=V(\xi,\delta). \qquad (3)$$

Введены «дифференциальные связи» аналогично [3] –[6].

$$\frac{\partial K}{\partial\chi}\Big|_{\theta=\theta(\xi,\delta),\chi=\chi(\xi,\delta)}=Y(\xi,\delta),\quad \frac{\partial K}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\theta(\xi,\delta),\chi=\chi(\xi,\delta)}=T(\xi,\delta),$$

$$\frac{\partial H}{\partial\chi}\Big|_{\theta=\theta(\xi,\delta),\chi=\chi(\xi,\delta)}=R(\xi,\delta),\quad \frac{\partial H}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\theta(\xi,\delta),\chi=\chi(\xi,\delta)}=B(\xi,\delta). \qquad (4)$$

Существует решение построенное МНФКЗП

Теорема. *Пусть дана система* (2) *для функций* $K(\chi,\theta)$, $H(\chi,\theta)$. *Тогда существует точное решение, где функция* $K(\chi,\theta)$ *определена в неявной параметрической форме_равенством*

$$8C_0 d u_0^3 v_0^2 \omega\xi^3 + A_1(\xi,\chi)K(\chi,\theta) + A_2(\xi,\chi)K^2 + A_3(\xi,\chi)K^3 + \qquad (5)$$

$$+A_4(\xi,\chi)K^4 + A_5(\xi,\chi)K^5 + A_6(\xi,\chi)K^6 + A_7(\xi,\chi)K^7 = 0,$$

$$\text{где}\quad \xi = -C_1 K(\chi,\theta)/2 \mp (1/2)\exp(-C_1\chi/2)\sqrt{2\exp(C_1\theta) - C_1^2K^2\exp(C_1\chi)}. \qquad (6)$$

Все коэффициенты $A_j(\xi,\chi)$, $j=1,\ldots,7$ *явно вычислены*

$$A_1(\xi,\chi) = 2u_0^2\,\omega\xi^2\,[6C_1C_0 d u_0 v_0^2\gamma^2 + 12C_0 d v_0^2\xi\gamma^2 - \exp(2\chi)u_0\omega(C_0v_0^2\gamma^2 + \beta\xi\omega)],$$

$$A_2(\xi,\chi) = 2u_0\,\omega\xi\,[4C_1^2C_0 d u_0^2 v_0^2\gamma^2 + 18C_1C_0 d u_0 v_0^2\xi\gamma^2 + 12C_0 d v_0^2\gamma^2\xi^2 +$$
$$+\exp(2\chi)(-C_0k_2u_0^2v_0^2\gamma^2 + u_0(-C_1C_0u_0v_0^2\gamma^2 + 3k_1u_0\beta\xi + C_0u_0\beta\gamma\xi -$$
$$-3C_0v_0^2\gamma^2\xi)\omega) - 3u_0\beta\xi(C_1u_0+\xi)\omega^2],$$

$$A_3(\xi,\chi) = -8C_0 d u_0 v_0^2\alpha\gamma^2\xi^2 + 2C_0 d v_0^2\gamma^2(C_1^3u_0^3 + 12C_1^2u_0^2\xi + 18C_1u_0\xi^2 + 4\xi^3)\omega +$$
$$+\exp(2\chi)(2C_0k_1k_2u_0^3v_0^2\gamma^2 - 2u_0^2(C_1C_0k_2u_0v_0^2\gamma^2 + 3k_1^2u_0\beta\xi +$$
$$+2C_0k_1u_0\beta\gamma\xi + 3C_0k_2v_0^2\gamma^2\xi - C_0v_0^2\alpha\gamma^2\xi + u_0v_0^2\beta\gamma^2\xi)\omega -$$
$$-u_0(C_1^2C_0u_0^2v_0^2\gamma^2 - 12C_1k_1u_0^2\beta\xi - 4C_1C_0u_0^2\beta\gamma\xi + 6C_1C_0u_0v_0^2\gamma^2\xi - 18k_1u_0\beta\xi^2 +$$
$$+6u_0\alpha\beta\xi^2 - 6C_0u_0\beta\gamma\xi^2 + 6C_0v_0^2\gamma^2\xi^2)\omega^2 - 6u_0\beta\xi(C_1^2u_0^2 + 3C_1u\xi + \xi^2)\omega^3),$$

$$A_4(\xi,\chi) = (-8C_1C_0 d u_0 v_0^2\alpha\gamma^2\xi + 6C_1C_0 d v_0^2\gamma^2(C_1^2u_0^2 + 4C_1u_0^2\xi + 2\xi^2)\omega +$$
$$+\exp(2\chi)(2k_1^3u_0^3\beta + 2C_0k_1^2u_0^3\beta\gamma + 6C_0k_1k_2u_0^2v_0^2\gamma^2 - 2C_0k_2u_0^2v_0^2\alpha\gamma^2 +$$
$$+2k_1u_0^2v_0^2\alpha\gamma^2 + 2C_0u_0^3v_0^2\beta\gamma^3 - 2u_0(3C_1k_1^2u_0^2\beta + 2C_1C_0k_1u_0^2\beta\gamma +$$
$$+3C_1C_0k_2u_0v_0^2\gamma^2 - C_1C_0u_0v_0^2\alpha\gamma^2 + C_1u_0^2v_0^2\beta\gamma^2 + 9k_1^2u_0\beta\xi - 6k_1u_0\alpha\beta\xi +$$
$$+6C_0k_1u_0\beta\xi - 2C_0u_0\alpha\beta\gamma\xi + 3C_0k_2v_0^2\gamma^2\xi - C_0v_0^2\alpha\gamma^2\xi + 3u_0v_0^2\beta\gamma^2\xi)\omega +$$

$$+(6C_1^2\ k_1 u_0^3\ \beta+2C_1^2 C_0 u_0^3\ \beta\gamma-3C_1^2 C_0\ u_0^2 v_0^2\ \gamma^2+$$
$$+36C_1 k_1\ u_0^2\ \beta\xi-12\,C_1 u_0^2\ \alpha\beta\ \xi+12C_1 C_0\ u_0^2\ \beta\gamma\ \xi-6C_1 C_0 u_0 v_0^2\gamma^2\ \xi+$$
$$+18k_1 u_0\ \beta\xi^2-12u_0\ \alpha\beta\xi^2+6C_0 u_0\ \beta\gamma\xi^2-26v_0^2\gamma^2\xi^2)\,\omega^2-$$
$$-2\beta(C_1\ u_0+\xi)(C_1^2\ u_0^2+8\ C_1 u_0\,\xi+\xi^2)\,\omega^3)),$$
$$A_5(\xi,\chi)=-4C_1^2\ C_0\ d\,u_0\ v_0^2\,\alpha\gamma^2+6C_1^3\ C_0\,d\,u_0\,v_0^2\ \gamma^2\omega+8\,C_1^2 C_0 d\,\xi\,v_0^2\ \gamma^2\,\omega+$$
$$+\exp(2\,\chi)(6\,k_1^3\ u_0^2\,\beta-6\ k_1^2 u_0^2\,\beta\alpha+6C_0 k_1^2\ u_0^2\,\beta\gamma-4C_0\ k_1 u_0^2\,\alpha\ \beta\gamma+$$
$$+6\,C_0\ k_1 k_2\,u_0\,v_0^2\ \gamma^2-4C_0\,k_2\,u_0\ v_0^2\,\alpha\gamma^2+6\,k_1 u_0^2\,v_0^2\ \beta\gamma^2-2\,u_0^2\,v_0^2\alpha\beta\gamma^2+$$
$$+6\ C_0\ u_0^2\ v_0^2\ \beta\gamma^3-2(9C_1 k_0^2\ u_0^2\ \beta-6C_1 k_1 u_0^2\ \alpha\beta+6C_1 C_0 k_1\ \ u_0^2\ \beta\gamma-$$
$$-2C_1 C_0\ \ u_0^2\,\alpha\beta\gamma+3C_1 C_0 k_2 u_0 v_0^2\ \gamma^2-C_1 C_0\ u_0 v_0^2\,\alpha\gamma^2+3\ C_1 u_0^2 v_0^2\,\beta\gamma^2+$$
$$+9u_0 k_1^2\ \beta\xi-12k_1 u_0\,\alpha\ \beta\xi+3u_0\,\alpha^2\ \ \beta\xi+6C_0\,k_1 u_0\ \beta\gamma\xi-4C_0 u_0\ \alpha\beta\gamma\xi+$$
$$+C_0\ k_2\,v_0^2\ \gamma\xi+3u_0\,v_0^2\ \beta\gamma^2\ \xi)\,\omega+(18\,u_0\,C_1^2\ k_1\ u_0^2\,\beta\ -6C_1^2\ u_0^2\,\alpha\beta+$$
$$+6\ C_1^2\ C_0 u_0^2\ \beta\ \gamma-3C_1^2\ C_0\,u_0\,v_0^2\ \ \gamma^2+36C_1 k_1 u_0\ \ \beta\xi-24C_1\ u_0\ \alpha\beta\xi+$$
$$+12C_1 C_0 u_0\ \beta\gamma\xi-2C_1 C_0\,v_0^2\ \gamma^2\xi+6k_1\ \beta\xi^2-6\alpha\beta\xi^2+2C_0\beta\gamma\xi^2)\,\omega^2-$$
$$-6C_1\,\beta(C_1^2\ \ u_0^2+3\ C_1\,u_0\,\xi+\xi^2)\,\omega^3)),$$
$$A_6(\xi,\chi)=(2C_1^3\ C_0\ d\ \ v_0^2\ \gamma^2\omega+\exp(2\,\chi)(6\,k_1^3\ \ u_0\,\beta-12\ \ k_1^2\,u_0\,\beta\alpha+6k_1 u_0\,\alpha^2\beta+$$
$$+6C_0\ k_1^2 u_0\ \ \beta\gamma-8\,C_0\ k_1\ u_0\,\alpha\beta\gamma+2C_0\ u_0\ \ \alpha^2\ \beta\gamma+2C_0\ k_1 k_2\,v_0^2\ \gamma^2-$$
$$-2C_0\,k_2\,v_0^2\alpha\gamma^2+6k_1 C_0\ v_0^2\beta\gamma^2-4u_0\ v_0^2\alpha\,\beta\gamma^2+6C_0 u_0 v_0^2\beta\gamma^3-$$
$$-2(9C_1 k_0^2\ u_0\ \ \beta-12C_1 k_1 u_0\ \ \alpha\beta+3C_1 u_0\ \ \ \alpha^2\ \beta+6C_1 C_0\ \ k_1 u_0\ \ \beta\gamma-$$
$$-4C_1 C_0\ u_0\,\alpha\beta\gamma+C_1 C_0\ k_2\,v_0^2\ \gamma^2+3\ \ C_1 C_0\ \ v_0^2\ \beta\gamma^2+3\,k_1^2\ \beta\xi-$$
$$-6k_1\ \alpha\ \beta\xi+3\,\alpha^2\ \ \beta\xi+2C_0\,k_1\ \ \beta\gamma\xi-2C_0\ \ \alpha\beta\gamma\xi+v_0^2\ \beta\gamma^2\xi)\omega+$$
$$+C_1(12C_1 k_1\ \ u_0\ \beta-12C_1 u_0\ \ \alpha\beta+6C_1 C_0 u_0\ \ \beta\gamma-C_1 C_0 v_0^2\ \ \gamma^2+$$
$$+12k_1\ \ \beta\xi-12k_1\,\beta\ \xi+4\,C_0\ \ \beta\gamma\xi\ )\omega^2-6C_1^2\ \beta(C_1 u_0+\xi)\omega^3\ )),$$
$$A_7(\xi,\chi)=2\exp(2\,\chi)\,\beta(k_1-\alpha+C_0\gamma-\ C_1\,\omega)(\,k_1^2-2\ \ k_1\ \alpha+\alpha^2+v_0^2\ \gamma^2-$$
$$-2C_1\,k_1\,\omega+2C_1\alpha\omega+C_1^2\omega^2). \qquad (7)$$

Функция $H(\chi,\theta)$ определяется_явно

$$H(\chi,\theta)=[u_0\,\xi\,\omega+(-k_1\ u_0+C_1\ u_0\ \omega+\xi\,\omega)K+(-k_1+\alpha+C_1\ \omega)\ K^2\,]/(\gamma\ K\,(u_0+K)).(8)$$

Доказательство.

Существуют формулы пересчета старых переменных χ,θ по новым переменным χ,θ

$$\frac{\partial\delta}{\partial\theta}=\frac{\partial\chi}{\partial\xi}/\det J,\qquad \frac{\partial\delta}{\partial\chi}=-\frac{\partial\theta}{\partial\xi}/\det J,\qquad \frac{\partial\xi}{\partial\theta}=-\frac{\partial\chi}{\partial\delta}/\det J,\qquad \frac{\partial\xi}{\partial\chi}=\frac{\partial\theta}{\partial\delta}/\det J. \qquad (9)$$

После преобразований аналогичных проведенным, в [3]-[5] получим

$$\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\delta}-\frac{\partial U}{\partial\delta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=Y(\xi,\delta)\det J,\qquad -\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{\partial\chi}{\partial\delta}+\frac{\partial U}{\partial\delta}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}=T(\xi,\delta)\det J, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\delta}-\frac{\partial V}{\partial\delta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=R(\xi,\delta)\det J,\qquad -\frac{\partial V}{\partial\xi}\frac{\partial\chi}{\partial\delta}+\frac{\partial V}{\partial\delta}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}=B(\xi,\delta)\det J, \qquad (11)$$

Уравнения системы (2) принимает вид

$$(\gamma U(\xi,\delta)V-\omega T+k_1U)\exp(2\chi)+\quad d_1(-\frac{\partial T}{\partial\delta}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}+\frac{\partial T}{\partial\xi}\frac{\partial\chi}{\partial\delta})/\det J+$$

$$+d_1(\frac{\partial Y}{\partial\delta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\frac{\partial Y}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\delta})/\det J-\alpha U^2\exp(2\chi)/(u_0+U)=0 \qquad (12)$$

$$(k_2V(\xi,\delta)-\omega B)\exp(2\chi)+\quad d(-\frac{\partial B}{\partial\delta}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}+\frac{\partial B}{\partial\xi}\frac{\partial\chi}{\partial\delta})/\det J+$$

$$+d_1(\frac{\partial R}{\partial\delta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\frac{\partial R}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\delta})/\det J-\exp(2\chi)\beta U(1-V/C_0)(1+V^2/v_0^2)=0. \qquad (13)$$

Далее с необходимостью, система уравнений дополняется двумя условиями равенства смешанных производных

$$\frac{\partial^2 K(\chi,\theta)}{\partial\chi\,\partial\theta}=\frac{\partial^2 K}{\partial\theta\partial\chi},\quad \frac{\partial^2 H(\chi,\theta)}{\partial\chi\,\partial\theta}=\frac{\partial^2 H}{\partial\theta\partial\chi}. \qquad (14)$$

Их можно записать в виде

$$-\frac{\partial Y}{\partial\xi}\frac{\partial\chi}{\partial\delta}+\frac{\partial Y}{\partial\delta}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}-\frac{\partial T}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\delta}+\frac{\partial T}{\partial\delta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=0, \qquad (15)$$

$$-\frac{\partial R}{\partial\xi}\frac{\partial\chi}{\partial\delta}+\frac{\partial R}{\partial\delta}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}-\frac{\partial B}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\delta}+\frac{\partial B}{\partial\delta}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=0. \qquad (16)$$

Здесь мы не будем повторять всю схему построения решения МНФКЗП подробно. Укажем только из четырех уравнений (10), (12), (15) строим систему функциональных линейных алгебраических уравнений (СФЛАУ) $A_1X=b_1,\ X=\{\chi'_\xi,\chi'_\delta,\theta'_\xi,\theta'_\delta\}$ проведенное в [3]--[5] лежит в основе метода МНФКЗП. Из четырех уравнений (11),(13),(16) строим вторую СФЛАУ $A_2X=b_2$. Матрицы $Aj,\ j=1,2$ названы в [4], [5] «сопутствующими» матрицами для_уравнений (2) соответственно. Решения двух СФЛАУ должны совпадать. В настоящее время СФЛАУ решается в системе <Математика>> за одну минуту в символьном виде. Анализ общего не тривиального множителя в условии разрешимости новой системы $\chi''_{\xi\delta}=\chi''_{\delta\xi},\theta''_{\xi\delta}=\theta''_{\delta\xi}$ показывает, что они удовлетворяются при следующих функциях $Y(\xi,\delta)=\xi,\quad T(\xi,\delta)=C_1U(\xi,\delta)+\xi.$ Тогда первое СФЛАУ значительно упростилось

$$\chi'_\xi=[-2\xi-C_1U(2+C_1U'_\xi)]/(C_1P_1),\qquad \chi'_\delta=-C_1UU'_\delta/P_1,$$

$$\theta'_\xi=[2\xi+C_1(2\xi+C_1U)U'_\xi]/(C_1P_1),\quad \theta'_\delta=(2\xi+C_1U)U'_\delta/P_1, \qquad (17)$$

$$P_1=2\xi^2+2C_1\xi U+(C_1U)^2,\ \det J=-2U'_\delta/(C_1P_1).$$

Интегралы системы имеют вид

$$\theta(\xi,\delta)=C_\theta-C_1^{-1}arctg[1+C_1U/\xi]+(2C_1)^{-2}\ln[2\xi^2+2C_1\xi U+(C_1U)^2],$$

$$\chi(\xi,\delta)=C_r-C_1^{-1}arctg[1+C_1U/\xi]-(2C_1)^{-2}\ln[2\xi^2+2C_1\xi U+(C_1U)^2].$$

Вычитая эти выражения, полагая для простоты константы сдвига C_θ,C_r равными нулю и возвращаясь в исходные переменные можно получить выражение для ξ (6) приведенное в теореме. Из (11) следуют выражения для функций $B(\xi,\delta),\quad R(\xi,\delta)$. Вычисляем производные и тогда из (13) следует (5). Соотношение (16) удовлетворяется тождественно.

Выводы. Построенные решения имеют локализованную в пространстве спиральную структуру, которые могут медленно вращаться с угловой скоростью ω.. Распределение «ингибитора» $S(t,x,y)$ подстраивается под распределение «тромбина» $Q(t,x,y)$. По формулам, приведенным в теореме можно построить различные графики и получить большое количество различной информации. Аналогичные более сложные решения распространяются на широкий класс систем типа (1) и им соответствующие нелинейные уравнения четвертого порядка. В данном случае, выбран самый простой вариант формул, когда обращаются в нуль сумма слагаемых связанных с оператором Лапласа в первом уравнении. Поэтому решение не зависит от коэффициента d_1. Однако якобиан преобразования (17) при этом не равен нулю $\det J \neq 0$.

В решениях построенных в [4] угловая скорость ω входит сингулярно и поэтому там нет возможности сделать предельный переход при $\omega \to 0$. В данном решении угловая скорость ω входит регулярно. Полагая в формулах приведенных в теореме угловая скорость ω входит регулярно. Можно положить $\omega = 0$. Тогда следуют формулы спиральной неподвижной структуры, решение соответствующей (1) эллиптической системы. Эти

формулы описывают «эффект» остановки спиральной волны, который имеет важный физический и биологический смысл в моделях свёртывания крови. Имеется много исторических примеров, когда одно точное решение открывало целую область новых математических работ. Так было с теорий солитонов и обратной задачей рассеяния, теорией «обостряющихся» локализованных решений и т.д. [5]. Поэтому, надеемся, что и другие исследователи продолжат изучение этого направления теории.

Примечание:

1. Лобанов А.И., Старожилова Т.К., Зарницина В.И., Атауллаханов Ф.И. Сравнение двух математических моделей для описания пространственной динамики процесса свертывания крови // Математическое моделирование, 2003, Т.15, No.1, С.14-28.

2. Крутикова М.П., Куриленко И.А., Лобанов А.И., Старожилова Т.К. Двумерные стационарные структуры в математической модели свертывания крови с учетом гипотезы о переключении активности тромбина. // Математическое моделирование, 2004, Т.16, No.12, С. 85-95.

3. Волосов К.А. Дис. ... док. ф-м. н., Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами. 2007, М.: МИЭМ, 252 с. http: eqworld.ipmnet.ru, http://www.aplsmath.ru/Дис%20Волосова%20К.А..pdf

4. Волосова А.К., Волосов К.А. Construction solutions of PDE in Parametric Form. International Journal of Mathematics and Mathematica Siences // V. 2009, ArticleID, 319268, 17p. http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2009/319269.html doi:10.1155./2009/319269

5. Волосова А.К. Математическое моделирование нелинейной динамики системы открытого гиперцикла. Дис. ... канд. ф.-м. н. М.: МИИТ. 2011. 140 с. www.aplsmath.ru.

UDC 001.891.57:53. 519.67

Моделирование эффекта остановки спиральной волны в процессе свёртывания крови

[1] Елена Вдовина
[2] Константин Волосов

[1-2] Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), Россия
Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9, 127994
[1] аспирант
E-mail: lenavek@mail.ru
[2] Доктор физико-математических наук, профессор
E-mail: konstantinvolosov@yandex.ru

Аннотация. Построено точное решение описывающее структуру спиральной волны в математической модели пространственной динамики свертывания крови. Впервые описан эффект остановки спиральной волны с сохранением спиральной структуры.

Ключевые слова. Модели реакции-диффузии; свёртывание крови; точное решение; спиральные волны.