UDC 517.9

The Numerical Method For Boundary Value Problems With Strong Singularity

[1] Nikolay A. Ponomarev
[2] Viktor A. Rukavishnikov

[1] FESTU, Russia
PhD student
[2] FESTU, Russia
Dr. (physical and mathematical), Professor
680028, Khabarovsk, Zaparina Street 127–57.
E-mail: ponomarev_na@list.ru

Abstract. R_ν-generalized method of the solution of boundary value problems with strong singularity of the decision caused by discordant degeneration of source data is considered.

Keywords: finite element method; singularity; boundary value problem; R_ν-generalized solution.

Сингулярностью является точка, в которой математический объект (обычно функция) не определён или имеет нерегулярное поведение (например, точка, в которой функция недифференцируема). Примеры функций с точками сингулярности представлены на рисунках 1 и 2. Функция $f(x) = 1/x$, график которой представлен на рисунке 1, имеет особую точку в нуле, где она стремится к положительной бесконечности справа и к отрицательной бесконечности – слева. Функция $g(x) = |x|$ (рисунок 2) также имеет сингулярность в нуле, где она недифференцируема.

Краевые задачи с сильной сингулярностью решения, вызванной вырожденном исходных данных, возникают при построении математических моделей ряда процессов, изучаемых в таких областях физики, как нелинейная оптика, физика плазмы и газового разряда, ядерная физика, электродинамика и других.

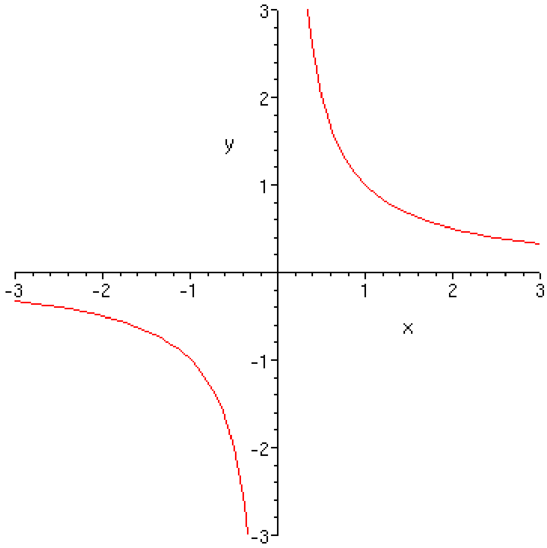

Рис. 1. График функции $f(x) = 1/x$

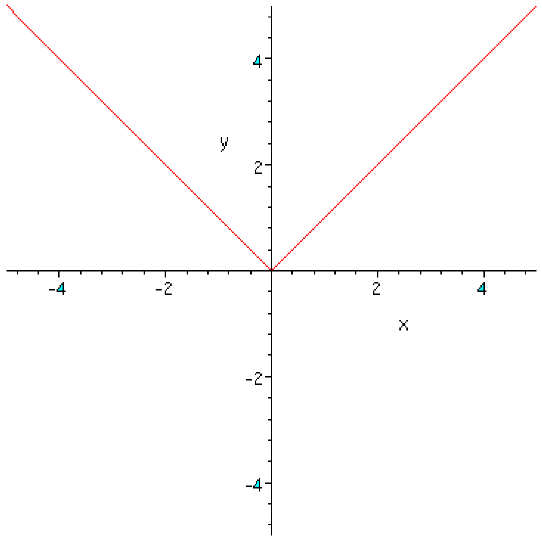

Рис. 2. График функции $g(x) = |x|$

Отличительной особенностью задач такого типа является то, что в большинстве случаев для них нельзя определить обобщённое (слабое) решение. Причиной этого может быть как сингулярность исходных данных, так и то, что решение не принадлежит пространству Соболева. В связи с этим решение таких краевых задач определяется как R_ν-

обобщённое, принадлежащее весовому пространству С.Л. Соболева и удовлетворяющее специальному весовому интегральному тождеству. Такое определение позволяет изучать существование и единственность, коэрцитивность и дифференциальные свойства решений краевых задач с сингулярностью, вызванной как наличием угловых точек на границе и сменой типа граничных условий, так и вырождением (согласованным и несогласованным) исходных данных.

Для приближённого решения краевых задач с сингулярностью, вызванной вырождением исходных данных, до настоящего времени использовались разностный метод и h, p и h-p версии МКЭ. В частности, для задач электродинамики и квантовой механики с сильной сингулярностью строились численные методы на основе выделения сингулярной и регулярной составляющих, сгущения сеток к точкам особенностей, мультипликативного выделения особенностей.

Рассмотрим краевую задачу с несогласованным вырождением исходных данных. Введем некоторые обозначения, требуемые для корректного описания поставленной задачи и дальнейшего ее решения.

Пусть $\mathbb{R}^2$ – двумерное евклидово пространство с элементами x_1 и x_2 и нормой $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Ω – ограниченная область пространства R^2 с границей $\partial\Omega$; $\overline{\Omega}$ – замыкание области Ω, т.е. $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, где $\partial\Omega$ – граница области. Через $\partial\Omega^o$ обозначим множество, состоящее из n точек границы $\partial\Omega\colon \partial\Omega^{(i)} = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\right) \in \partial\Omega$, $\partial\Omega^o = \bigcup_{i=1}^{n} \partial\Omega^{(i)}$. Будем предполагать, что граница $\partial\Omega$ кусочно-гладкая и $\partial\Omega \setminus \partial\Omega^o \in \mathbb{C}^2$, а сама область Ω выпуклая.

Пусть O_i^{δ} – круг с центром в точке $\partial\Omega^{(i)}$ $(i = \overline{1,n})$ и радиусом $\delta > 0$, т.е. $O_i^{\delta} = \left\{x \mid \left\|x - \partial\Omega^{(i)}\right\| \le \delta\right\}$, и $O_i^{\delta} \cap O_j^{\delta} = \emptyset$, если $i \ne j$. Пусть $\Omega' = \bigcup_{i=0}^{n} (\Omega \cap O_i^{\delta})$.

Через $\rho(x)$ определим весовую функцию, бесконечно дифференцируемую и положительную всюду, кроме точек множества $\partial\Omega^o$, и удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\rho(x) = \delta$, если $x \in \overline{\Omega}\setminus\Omega'$;

2) $\rho(x) = \sqrt{\left(x_1 - x_1^{(i)}\right)^2 + \left(x_2 - x_2^{(i)}\right)^2}$, если $x \in \Omega \cap O_i^{\delta/2} (i = \overline{1,n})$;

3) $\delta/2 \le \rho(x) \le \delta$, если $x \in \Omega\setminus O_i^{\delta/2} (i = \overline{1,n})$.

Пусть, кроме того, производные функции $\rho(x)$ удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{\partial\rho(x)}{\partial x_l}\right| \le \delta' \quad (l = 1,2),$$

где $\delta' > 0$ – вещественное число.

Через $H^1_{\infty,-\beta}(\Omega, C_1)$ и $L_{\infty,-\beta}(\Omega, C_2)$ обозначаются множества функций, нормы которых удовлетворяют условию:

$$\|u(x)\|_{H^1_{\infty,-\beta}(\Omega,C_1)} = \max_{|\lambda|\le 1} \underset{\forall x\in\Omega}{vraimax} \left|\rho^{-\beta+|\lambda|}(x) D^{\lambda} u(x)\right| \le C_1,$$

$$\|u(x)\|_{H^0_{\infty,-\beta}(\Omega,C_2)} = \underset{\forall x\in\Omega}{vraimax} \left|\rho^{-\beta+|\lambda|}(x) D^{\lambda} u(x)\right| \le C_2,$$

где $D^{\lambda} = \frac{\partial|\lambda|}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2), |\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2$; λ_1, λ_2 – целые неотрицательные числа.

Через $W^l_{2,\alpha+l-1}(\Omega,\delta)$ для $l \geq 1$ обозначим множество функций, удовлетворяющих условиям:

а) $\left|D^k u(x)\right| \leq C_1 \cdot \gamma^k \cdot k! \cdot (\rho^{\alpha+k}(x))^{-1}$ для $x \in \Omega'$, где $k = \overline{0,l}$, постоянные C_1, $\gamma \geq 1$ не зависят от k;

б) $\|u(x)\|_{L_{2,\alpha}(\Omega\backslash\Omega')} \geq C_2, C_2 = const$; с квадратом нормы

$$\|u(x)\|^2_{W^l_{2,\alpha+l-1}(\Omega,\delta)} = \sum_{|\lambda|\leq l} \left\|\rho^{\alpha+l-1}(x)|D^\lambda u(x)|\right\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Множество $\dot{W}^l_{2,\alpha+l-1}(\Omega,\delta) \subset W^l_{2,\alpha+l-1}(\Omega,\delta)$ определим как замыкание множества бесконечно дифференцируемых финитных в области Ω функций.

В области Ω, расположенной в $\mathbb{R}^2$, рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$-\sum_{l=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(a_{ll}(x)\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) + a(x)u(x) = f(x) \tag{1}$$

с граничным условием

$$u(x) = 0, x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Данная краевая задача является краевой задачей Дирихле с несогласованным вырождением исходных данных, если коэффициенты уравнения для некоторого вещественного числа β подчиняются требованиям:

$$\begin{gathered} a_{ll}(x) \in H^1_{\infty,-\beta}(\Omega, C_1), \quad a(x) \in L_{\infty,-\beta}(\Omega, C_2), \\ \sum_{l=1}^{2} a_{ll}(x)\xi_l^2 \geq C_3\rho^\beta(x)\sum_{l=1}^{2}\xi_l^2, \\ a(x) \geq C_4\rho^\beta(x) \ \text{почти всюду на } \Omega. \end{gathered} \tag{3}$$

Правая часть уравнения, для некоторого вещественного неотрицательного числа μ, удовлетворяют условиям:

$$f \in L_{2,\mu}(\Omega,\delta) \tag{4}$$

Здесь $C_i (i = 1,2,3,4)$ – положительные постоянные, не зависящие от x; ξ_1, ξ_2 – любые вещественные параметры.

Введем билинейную и линейную формы:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\Omega(u_\nu, \upsilon) = \int_\Omega \sum_{l=1}^{2} \Bigg[& a_{ll}(x)\rho^{2\nu}(x)\frac{\partial u_\nu(x)}{\partial x_l}\frac{\partial \upsilon(x)}{\partial x_l} + a_{ll}(x)\frac{\partial\rho^{2\nu}(x)}{\partial x_l}\frac{\partial u_\nu(x)}{\partial x_l}\upsilon(x) \\ & + a(x)\rho^{2\nu}(x)u_\nu(x)\upsilon(x)\Bigg]dx_1dx_2, \end{aligned} \tag{5}$$

$$(f,\upsilon) = \int_\Omega \rho^{2\nu}(x)f(x)\,\upsilon(x)dx_1dx_2. \tag{6}$$

Функция $u_\nu(x)$ из множества $W^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega,\delta)$ называется R_ν-обобщенным решением задачи Дирихле с несогласованным вырождением исходных данных, если $u(x)=0,\ x\in\partial\Omega$ и $\forall v\in \dot{W}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega,\delta)$ справедливо интегральное тождество

$$\tilde{a}_\Omega(u_\nu,v)=(f,v), \tag{7}$$

при любом, но фиксированном значении ν, удовлетворяющем неравенству [1]:

$$\nu>\mu+\beta/2. \tag{8}$$

Для численного решения поставленной задачи произведем триангуляцию области $\overline{\Omega}$ на непересекающиеся равнобедренные прямоугольные треугольники. Треугольники являются простейшими многоугольниками, на которые можно разделить любую двумерную область.

Далее будем рассматривать конечный элемент в локальной системе координат (ξ,η).

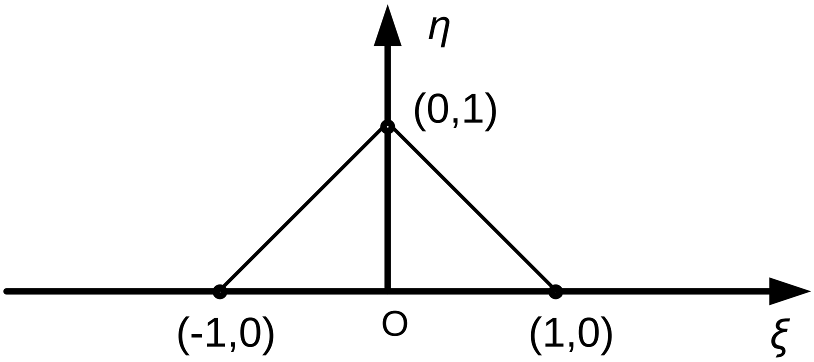

Рис. 3. Координаты узлов конечного элемента в локальной системе координат

В качестве пробной функции выберем кубический полином относительно переменных ξ и η, кроме того, потребуем, чтобы коэффициенты при $\xi\eta^2$ и $\xi^2\eta$ на каждом конечном элементе были равны, тогда для элемента e^i имеем:

$$u_\nu=a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi^2+a_5\xi\eta+a_6\eta^2+a_7\xi^3+a_8\eta^3+a_9(\xi\eta^2+\xi^2\eta). \tag{9}$$

Базисные функции для данного конечного элемента со степенями свободы $N_{1i}(\xi,\eta)$, $N_{2i}(\xi,\eta)$ и $N_{3i}(\xi,\eta)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{array}{lll}
N_{1i}(\xi,\eta)=1, & N_{2i}(\xi,\eta)=0, & N_{3i}(\xi,\eta)=0,\\
N_{1j}(\xi,\eta)=0, & N_{2j}(\xi,\eta)=0, & N_{3j}(\xi,\eta)=0,\\
\dfrac{\partial N_{1i}(\xi,\eta)}{\partial\xi}=0, & \dfrac{\partial N_{2i}(\xi,\eta)}{\partial\xi}=1, & \dfrac{\partial N_{3i}(\xi,\eta)}{\partial\xi}=0,\\
\dfrac{\partial N_{1j}(\xi,\eta)}{\partial\xi}=0, & \dfrac{\partial N_{2j}(\xi,\eta)}{\partial\xi}=0, & \dfrac{\partial N_{3j}(\xi,\eta)}{\partial\xi}=0,\\
\dfrac{\partial N_{1i}(\xi,\eta)}{\partial\eta}=0, & \dfrac{\partial N_{2i}(\xi,\eta)}{\partial\eta}=0, & \dfrac{\partial N_{3i}(\xi,\eta)}{\partial\eta}=1,\\
\dfrac{\partial N_{1j}(\xi,\eta)}{\partial\eta}=0, & \dfrac{\partial N_{2j}(\xi,\eta)}{\partial\eta}=0, & \dfrac{\partial N_{3j}(\xi,\eta)}{\partial\eta}=0,
\end{array} \tag{10}$$

при $(i\neq j)$ [2].

Решая систему линейных алгебраических уравнений можно вычислить, что соотношениям (10) удовлетворяют следующие базисные функции [3]:

$$N_{11}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(2 - 3\xi - 3\eta + \xi^3 + \eta^3 + 3(\xi\eta^2 + \xi^2\eta)), \tag{11.1}$$

$$N_{12}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(2 + 3\xi + 3\eta - 12\eta^2 - \xi^3 + 7\eta^3 - 3(\xi\eta^2 + \xi^2\eta)), \tag{11.2}$$

$$N_{13}(\xi,\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3, \tag{11.3}$$

$$N_{21}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi - \eta - \xi^2 - \eta^2 + \xi^3 + \eta^3 + \xi\eta^2 + \xi^2\eta), \tag{11.4}$$

$$N_{22}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(-1 - \xi - \eta + \xi^2 + 5\eta^2 + \xi^3 - 3\eta^3 + \xi\eta^2 + \xi^2\eta), \tag{11.5}$$

$$N_{23}(\xi,\eta) = -\eta + 2\eta^2 - \eta^3 + \xi\eta^2 + \xi^2\eta, \tag{11.6}$$

$$N_{31}(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(-\xi\eta + \xi\eta^2 + \xi^2\eta), \tag{11.7}$$

$$N_{32}(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(2\eta + \xi\eta - 4\eta^2 + 2\eta^3 - \xi\eta^2 - \xi^2\eta), \tag{11.8}$$

$$N_{33}(\xi,\eta) = -\eta^2 + \eta^3. \tag{11.9}$$

Таким образом, для реализации метода, необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\int\limits_{\Omega} \left[a_{11}\rho^{2\nu}\frac{\partial u_\nu}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} + a_{11}\frac{\partial \rho^{2\nu}}{\partial \xi}\frac{\partial u_\nu}{\partial \xi}V + a_{22}\cdot\rho^{2\nu}\cdot\frac{\partial u_\nu}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial V}{\partial \eta} + a_{22}\cdot\frac{\partial \rho^{2\nu}}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial u_\nu}{\partial \eta}\cdot V + 2\cdot a\cdot\rho^{2\nu}\cdot u_\nu\cdot V\right]d\xi d\eta = \int\limits_{\Omega}\rho^{2\nu}\cdot f\cdot V d\xi d\eta, \tag{12}$$

где $V(\xi,\eta) = [N_{11} \quad N_{12} \quad N_{13} \quad N_{21} \quad N_{22} \quad N_{23} \quad N_{31} \quad N_{32} \quad N_{33}]^{\mathrm{T}}$, а $u_\nu(\xi,\eta)$ представляется в виде:

$$u_\nu(\xi,\eta) = a_1N_{11} + a_2N_{12} + a_3N_{13} + a_4N_{21} + a_5N_{22} + a_6N_{23} + a_7N_{31} + a_8N_{32} + a_9N_{33} \tag{13}$$

Систему (12) можно переписать в виде:

$$K^e \cdot A^e = F^e, \tag{14}$$

где $A^e = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9]^{\mathrm{T}}$ – матрица коэффициентов, значения которых требуется найти, $K^e = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{19} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{29} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{91} & b_{92} & \cdots & b_{99} \end{pmatrix}$ – матрица жесткости, в которой b_{ij} находится из соотношения:

$$b_{ij} = \int\limits_{\Omega} \left(a_{11} \left(\rho^{2\nu} \left(\frac{\partial N_{mn}}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial \rho^{2\nu}}{\partial \xi} \frac{\partial N_{mn}}{\partial \xi} N_{mn} \right) + a_{22} \left(\rho^{2\nu} \left(\frac{\partial N_{mn}}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\partial \rho^{2\nu}}{\partial \eta} \frac{\partial N_{mn}}{\partial \eta} N_{mn} \right) + 2a\rho^{2\nu} (N_{mn})^2 \right) d\xi d\eta, \quad (15)$$

а вектор нагрузки F^e находится по формуле:

$$F^e = \int\limits_{\Omega} (\rho^{2\nu} f V)\, d\xi d\eta. \quad (16)$$

Индекс e свидетельствует о том, что значения получены на конечном элементе. Для нахождения значений на всей области Ω необходимо построить матрицы жесткости и векторы нагрузки для всех конечных элементов. Далее строится глобальная матрица жесткости K_f и глобальный вектор нагрузки F_f. Для снятия флажка f требуется учесть граничные условия.

Таким образом, с использованием ЭВМ, находится численное решение краевой задачи Дирихле с несогласованным вырождением исходных данных с высокой степенью точности.

Примечания:

1. Rukavishnikov V.A. The methods of numerical analysis for boundary value problems with strong singularity // Russ. J. of Numer. Anal. and Math. Model. 2009. V. 24. № 6. P. 565–590.
2. Норри, Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. М., 1981. 304 с.
3. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов. М., 1979. 392 с.

УДК 517.9

Решение краевых задач с сильной сингулярностью

[1] Николай Анатольевич Пономарев
[2] Виктор Анатольевич Рукавишников

[1] ДВГУПС, Россия
магистрант
[2] ДВГУПС, Россия
680028, Хабаровск, ул. Запарина, д. 127, кв. 57
Доктор физико-математических наук, профессор
E-mail: ponomarev_na@list.ru

Аннотация. Рассматривается R_ν-обобщённый метод решения краевых задач с сильной сингулярностью решения, вызванной несогласованным вырождением исходных данных.

Ключевые слова: Метод конечных элементов; сингулярность; краевая задача; R_ν-обобщённый метод.