UDC 531

A Variation Principle in the Method of Mathematical Modeling of Limit States Design

L.I. Mironova

Ronts msou them. V.S. Chernomyrdin, Russia
siti Podolsk, Moscow region
PhD (technical)
E-mail: mironova_lub@mail.ru

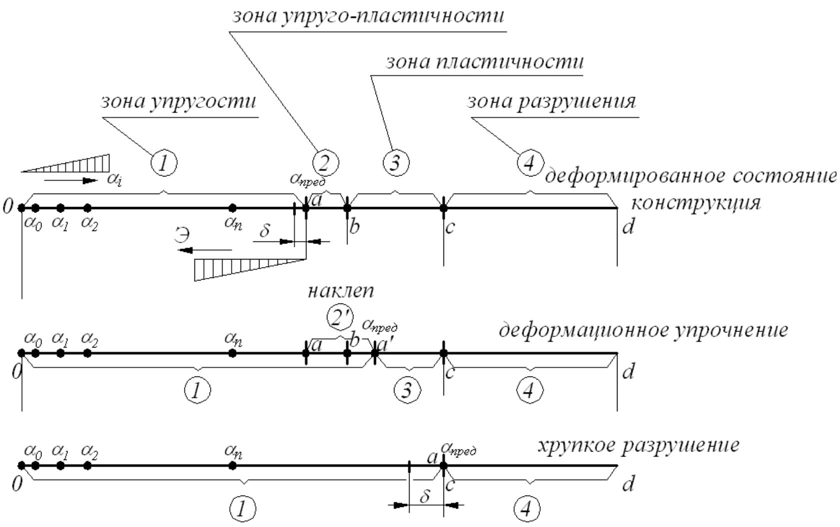
Abstract. The article gives model of the critical state of the generalized construction with the purpose of definition of methods of research and forecasting its maximum capabilities.

Keywords: boundary state; the stress-strain state; the evaluation criteria; stress; strain; displacement.

Все предложения, связанные с созданием теорий предельных состояний, основаны на отказе от термина «теории прочности», как обобщающего понятия нарушения прочности конструкций, которое не в полной мере включает вопросы перехода конструкций из упругого состояния в пластическое. Как правило, теория предельных состояний связана с изучением свойств материала, его структуры и физико-механических процессов, протекающих при образовании пластических деформаций или при начале разрушения. Однако специалистам хорошо известно: – то, что является предельным для материала, не является предельным для конструкции. При этом учитывать все факторы влияния на конструкцию не всегда представляется возможным и необходимым, так как это может привести к некоторому хаосу в потоке полученных данных, искажающих реальное представление о предельных возможностях самой конструкции. Поэтому история поисков наиболее практически приемлемых теорий предельных состояний продолжается. Предлагается следующий подход в рассмотрении этой проблемы.

Для реальных инженерных задач, связанных с определением предельных состояний конструкций, необходимо установить условие перехода от упругой стадии деформирования к пластической стадии, что в первую очередь требует анализа напряженно-деформированного состояния тела, и последующего анализа физических зависимостей процесса во второй стадии деформирования. Это объясняется процессом деформирования элементов конструкций, который условно разделяют на две стадии. Начальная стадия – упругое деформирование, где компоненты тензоров напряжений и деформаций связаны законом Гука. Последующей стадией является упруго-пластическая стадия деформирования.

В данной постановке вопроса необходимо рассмотреть НДС исследуемой конструкции на некоторых интервалах, которые характеризуют процессы: упругого, упруго-пластичного (переходной процесс) и пластического состояний. С этой точки зрения наглядное представление о деформированном состоянии конструкции можно выразить некоторой формализованной моделью ленточной структуры, представленной на рис., в виде «линейки» зон переходных процессов и оценочных критериев НДС.



Модель предельного состояния конструкции в линейном представлении:
где α_i - оценочный критерий НДС; $\alpha_{пред}$ – предельный критерий НДС;
a, b, c, d –конечные значения интервалов переходных процессов;
δ - интервал приближения к ПСК

Для проведения исследования и определения предельных возможностей конструкции сформулируем задачу следующим образом. Пусть α - будет оценочным критерием, описывающим напряженно-деформированное состояние конструкции (критерий НДС) в упругом состоянии, тогда в процессе эксплуатации (или изготовления, или с учетом того и другого) критерий НДС может (или будет) принимать свои значения α_o, α_1, ..., α_n в зоне упругости. Будем считать, что предельное состояние конструкции достигается в конечном значении интервала зоны упругости и соответствует предельному значению критерия НДС - $\alpha_{пред}$. К более полному пониманию момента достижения конструкцией предельного состояния (ПС) можно сформулировать несколько смысловых интерпретаций определения ПСК с учетом поведения конструкции.

Первый вариант. Конструкция принимает одно из своих значений α_i, которое занимает определенное место в линейке оценки НДС и может быть предельным значением $\alpha_{пред}$. Тогда математическая формулировка ПСК может быть выражена следующим соотношением

$$\lim \alpha_i {}_{\alpha \to \alpha_{пред}} = k\ H_{ПСК}\,, \tag{1}$$

где α_i – оценочный критерий, описывающий НДС конструкции; $H_{ПСК}$ - параметр предельного состояния; k - коэффициент соответствия между ними. Схема оценки такого предельного состояния конструкции должна соответствовать схеме сравнения, когда сначала определяются предельные значения факторов влияния, а затем - реальные параметры действующих факторов. В ряде случаев они могут быть известными или частично известными. Далее, реализуя формулу $\Delta\alpha = \alpha_{пред} - \alpha_i$, можно оценить состояние конструкции. Также можно, к примеру, ввести весовую составляющую степени соответствия предельному состоянию.

Второй вариант. Конструкция накапливает НДС от действия факторов, соответствующих оценочным критериям α_o, α_1, ..., α_n, сумма которых может соответствовать предельному значению критерия $\alpha_{пред}$, тогда

$$\lim \sum_{i=n} \alpha_i = \alpha_{пред} = k\ H_{ПСК}\,. \tag{2}$$

Очевидно, что в этом случае, необходимо определить оценочные критерии в интервале [0, a]. Если рассмотреть оценочные критерии α_i в интервале [0, a - δ], то можно предположить, что на этом отрезке конструкция не достигнет своего предельного состояния. Назовем интервал [0, a - δ] гарантированным интервалом упругого состояния конструкции.

В любом из этих вариантов в предложенной модели ПСК необходимо раскрыть понятие предельного состояния конструкции, и определить в каких процессах оно рассматривается. С точки зрения классического подхода, когда различают две группы ПС, а именно: – непригодность к эксплуатации по причинам потери несущей способности и – непригодность к нормальной эксплуатации в соответствии с предусмотренными технологическими или бытовыми условиями, второй вариант является более предпочтительным. Это объясняется тем, что в проектных разработках конструкции всегда определены технические условия для соблюдения прочностной надежности в процессе ее эксплуатации.

Рассматривая работу конструкции в стационарном или динамическом режимах, мы обязательно затронем вопрос влияния временной характеристики, который кардинальным образом меняет принципы подхода к определению ПСК. Так, например, в стационарных процессах используют формализм Эйлера и Лагранжа [1], и для определения упругой и упругопластической задач часто применяются решения, основанные на вариационном принципе Лагранжа

$$\delta Э = 0, \tag{3}$$

где *Э* - квадратичный функционал полной потенциальной энергии системы «тело-нагрузка», который может быть записан для любой конструкции.

Формулировка вариационного принципа Лагранжа заключается в утверждении, что из всех возможных напряженных состояний упругого тела, для которых выполнены граничные условия в перемещениях, а деформации и перемещения связаны геометрическими уравнениями теории упругости, истинным является то состояние, при котором потенциальная энергия системы получает минимальное значение [2].

Конечно-разностные представления при минимизации функционала Э нашли в развитии вариационно-разностного метода (ВРМ). Данный метод сводит проблему минимизации функционала энергии системы *Э*, являющейся квадратичной функцией относительно деформаций и перемещений, к задаче минимизации функции многих переменных, отнесенных к узлам конечно-разностной сетки. Разработанные варианты ВРМ и численные методики позволяют решать статические и квазистатические упругопластические задачи в дву – или трехмерной постановках на неравномерных сетках для тел сложной формы и сложным законом распределения физико-механических характеристик с целью определения их напряженно – деформированного состояния и анализа прочности, а также создания рационального по прочности проекта конструкции.

Запишем математическую формулировку задачи линейной теории упругости в декартовой системе координат с помощью дифференциальных уравнений в частных производных: - уравнения равновесия $\sigma_{ij} + \overline{F_i} = 0$; соотношения деформации - перемещения $\varepsilon_{ij} = \dfrac{u_{ij} + u_{ji}}{2}$; соотношения напряжения – деформации $\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$; обратные им соотношения $\varepsilon_{ij} = b_{ijkl}\sigma_{kl}$; граничные условия в напряжениях $\sigma_{ij} n_j = \overline{T_i}$ на S_σ; граничные условия в перемещениях $u_i = \overline{u_j}$ на S_u. Здесь $\overline{F}$ - компоненты массовых сил, отнесенных к единичному объему; $\overline{T}$ - компоненты заданных внешних сил, отнесенные к единице площади поверхности; $\overline{u_j}$ - заданные компоненты перемещений (i=1,2,3); a_{ijkl}, b_{ijkl} - компоненты тензоров четвертого ранга упругих постоянных; n_j - направляющие косинусы единичной внешней нормали к поверхности; S_σ - часть поверхности S тела, на которой заданы внешние нагрузки; S_u - часть поверхности S тела, на которой заданы перемещения; $S = S_\sigma + S_u$.

С математической точки зрения нахождение искомых величин во многих случаях не может быть определено точными аналитическими решениями. Приведем вариационно-разностный метод решения данной задачи. Используя вариационный принцип Лагранжа (3), заменяем описанную выше краевую задачу вариационной задачей, в которой функционал энергии *Э* определяется классическим соотношением

$$Э = U - A_1 - A_2\,, \tag{4}$$

где U- потенциальная энергия деформации тела; A_1, A_2 - работа объемных и поверхностных сил на вызванных ими перемещениях. Или, с использованием выражений для составляющих функционал членов

$$Э = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV - \int_V \overline{F}_i u_i dV - \int_S \overline{T}_i u_i dS \qquad (5)$$

Таким образом, решение задачи состоит в нахождении поля перемещений $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ в направлении осей координат x, y, z соответственно, доставляющих минимум функционалу полной потенциальной энергии системы.

Сеточный аналог E (u_S, v_p, w_k) функционала (5) реализуется заменой составляющих его интегралов конечными суммами, а производных – их конечно-разностными представлениями. Приближенное конечно-разностное выражение полной потенциальной энергии системы E получается в предположении, что в пределах каждой ячейки все функции и их производные остаются постоянными. Матрица системы имеет ленточную структуру, симметрична и положительно определена. Это свойство является определяющим при численной реализации для практических приложений; позволяющее поэтапно контролировать точность выкладок и промежуточных результатов.

Примечания:

1. Ланцош К. Вариационные принципы механики. Пер. с англ. В.Ф. Гантмахера. М.: Мир, 1965. 408 с.

2. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высшая школа, 1975. 528 с.

УДК 531

Вариационный принцип в методе математического моделирования предельных состояний конструкции

Л.И. Миронова

РОНЦ МГОУ им. В.С. Черномырдина, Россия
г. Подольск Московской области
Кандидат технических наук
E-mail: mironova_lub@mail.ru

Аннотация. В статье приводится феномологическая модель предельного состояния обобщенной конструкции с целью определения методов исследования и прогнозирования ее предельных возможностей.

Ключевые слова: предельное состояние; напряженно-деформированное состояние; оценочные критерии; напряжения; деформации; перемещения.