01.00.00 Physics-mathematics sciences

01.00.00 Физико-математические науки

UDC 681.5.011

Motion Stabilization for the Final Time Interval

Saule B. Berkimbaeva

Kazakh-British Technical University, Kazakhstan
050000, Almaty, Tole Bi Street, 59
PhD (Physical and Mathematical), teacher
E-mail: aksu1963@gmail.com

Abstract. The article considers the parameters distribution control system, which is described through partial differential equation. The operation mode brings the system to null state for a finite amount of time.

Keywords: Program control; differentiation operator; boundary condition; motion stabilization; feedback; functions.

Рассматривается управляемая система с распределенными параметрами, описываемая линейными уравнениями в частных производных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + w, \tag{1}$$

разрешенное относительно первой производной по времени. Где $u(x,t)$ - скалярная функция $n-$мерного вектора $x = (x_1,..., x_n)$ пространственных координат и времени t, характеризующая состояние системы, $w-$искомое управление, $A-$линейный дифференциальный оператор, содержащий частные производные по координатам $x_i, i = \overline{1,n}$. Коэффициенты оператора A не зависят от t, а его порядок $ordA$ считаем четным и равным $2m$.

Уравнение (1) рассматривается в некоторой ограниченной области изменения пространственных переменных $x \in \Omega$ и при $t \geq 0$. На границе Γ области Ω должно удовлетворяться однородное граничное условие:

$$Mu = 0,\ M = (M_1,..., M_m),\ x \in \Gamma \tag{2}$$

Здесь M_j -линейный дифференциальный оператор порядка $ordM_j < 2m\ (j = \overline{1,m})$ с коэффициентами не зависящими от t.

Начальные условия имеют вид:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \tag{3}$$

На управляющую функцию w наложено ограничение

$$|w(x,t)| \leq w^0,\ x \in \Omega,\ t \geq 0 \tag{4}$$

где $w^0 > 0-$заданная постоянная. Сформулируем задачу стабилизации движения на конечном отрезке времени [1].

Требуется построить стабилизирующее управление $w(x,t)$ удовлетворяющее ограничению (4) и такое, что соответствующее ему решение уравнения (1) с граничным условием (2) и с соответствующими начальными условиями (3) обращается в нуль в некоторый конечный момент $T>0.$ Точнее, всюду в Ω должны быть выполнены условия

$$u(x,T)=0. \tag{5}$$

Решение поставленной задачи будет опираться на метод Фурье. Для его применения рассмотрим сначала следующую задачу на собственные значения, отвечающую начально-краевым задачам (1)-(3) при $w=0.$

Задача состоит в определении функций $\varphi(x), x\in\Omega,$ удовлетворяющих при соответствующих постоянных λ линейному однородному уравнению и граничному условию

$$A\varphi=-\lambda\varphi,\ \ x\in\Omega,\ \ M\varphi=0,\quad x\in\Gamma. \tag{6}$$

Как известно, при определенных условиях задача на собственные значения (6) обладает следующими свойствами.

Имеется дискретный счетный спектр положительных собственных значений λ_k, которые могут быть пронумерованы в неубывающем порядке: $\lambda_1\le\lambda_2\le...,$ причем $\lambda_k\to\infty$ при $k\to\infty$. Указанным собственным значениям отвечает ортоганальная система собственных функций $\varphi_k(x)$, которая является полной в области $\Omega.$ Нормировав эти функций, получим ортонормальную систему функций $\varphi_k(x)$, обладающих следющими свойствами:

$$\begin{gathered} A\varphi_k=-\lambda_k\varphi_k,\quad x\in\Omega; \\ M\varphi_k=0,\quad x\in\Gamma, \\ (\varphi_k,\varphi_i)=\int_\Omega\varphi_k(x)\varphi_i(x)dx=\delta_{ki} \end{gathered} \tag{7}$$

где δ_{ki} – символ Кронекера.

Воспользуемся теперь методом Фурье для разделения временной и простанстранственной зависимостей. Решение уравнения (1) будем искать в виде разложений по собственным функциям:

$$u(x,t)=\sum q_k(t)\varphi_k(x) \tag{8}$$

где $q_k(t)-$ некоторые функций времени.

Управление W также представим в виде:

$$w(x,t)=\sum v_k(t)\varphi_k(x) \tag{9}$$

Где $v_k(t)-$ пока неизвестные функции времени. Подставляя разложения (8), (9) в уравнение (1) получим

$$\dot{q}_k+\lambda_k q_k=v_k \tag{10}$$

Получим начальное условие в виде

$$q_k(0)=q_k^0=\int_\Omega u_0(x)\varphi_k(x)dx \tag{11}$$

Таким образом, исходная задача управления для уравнений в частных производных (1) свелась к задаче управления счетных линейных управляемых систем (10). На управляющие функции v_k этих систем наложим ограничения

$$|v_k(t)|<a_k,\quad t\ge0 \tag{12}$$

Значения постоянных a_k должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялось ограничение (4).

Учитывая (9) и (12) получим

$$\left|w(x,t)\right| \le \sum a_k \left|\varphi_k(x)\right|.$$

Следовательно, для выполнения исходного ограничения (4) достаточно потребовать, чтобы при всех $x \in \Omega$ удовлетворялось неравенство

$$\sum a_k \left|\varphi_k(x)\right| \le w^0, \quad x \in \Omega \tag{13}$$

Итак, для решения поставленной задачи управления уравнениями (1) достаточно решить следующие задачи управления системой (18). Требуется построить управления по обратной связи $v_k(q_k, t)$ и приводящая эту систему в нулевое состояние за конечное время при любых начальных условиях вида (11), т.е. решить задачу стабилизации движения на конечном отрезке времени.

Стабилизирующее управление типа обратной связи можно представить в виде [2]

$$v_k(q_k, t) = -K_k(t) q_k, \quad t \in [0, T) \tag{14}$$

где

$$K_k(t) = W_k^{-1}(t,T), \quad W_k(t,T) = n_k^2(t) R_k(t,T)$$

$$Q_k(t) = n_k^{-1}(t), \quad R_k(t,T) = \int_t^T n_k^2(\tau) d\tau, \quad R_k(0,T) > 0 \tag{15}$$

Управление (14) с другой стороны совпадает с программным управлением:

$$v_k(t) = -Q_k R_k^{-1}(0,T) q_k^0, \quad t \in [0, T)$$

И при этом

$$q_k(t) = n_k(t)\, R_k(t,T) R_k^{-1}(0,T) q_k^0$$

$$q_k(T) = 0.$$

Следовательно, для выполнения ограничения

$$\left|v_k\right| \le a_k \tag{16}$$

Потребуем, чтобы $\left|Q_k(t) R_k^{-1}(0,T) q_k^0\right| \le a_k$ в силу выбора T и q_k^0.

Тогда управление типа обратной связи (15) также решает задачу о стабилизации движения системы (10) при ограниченном управлении. Для полученного стабилизирующего управления минимизируется функционал:

$$J_k \int_0^t v_k^2(t) dt \tag{17}$$

Вычислим теперь выражения из (15). Здесь фундаментальная функция Π_k^t определяется из уравнения: $\dot{\Pi}_k(t) = -\lambda_k \Pi_k(t), \quad \Pi_k(0) = 1,$ т.е. $\Pi_k(t) = e^{-\lambda_k t}$.

Следовательно,

$$Q_k(t) = e^{-\lambda_k t}. \quad R_k(0,T) = \frac{1}{2\lambda_k}\left(e^{2\lambda_k T} - 1\right) > 0,$$

$$W_k(t,T) = \frac{e^{-2\lambda_k t}}{2\lambda_k}\left(e^{2\lambda_k T} - e^{2\lambda_k t}\right) = \frac{1}{2\lambda_k}\left[e^{2\lambda_k (T-t)} - 1\right],$$

$$K_k(t) = \frac{2\lambda_k}{e^{2\lambda_k (T-t)} - 1}.$$

$$v_k(q_k, t) = -\frac{2\lambda_k}{e^{2\lambda_k(T-t)} - 1} q_k \quad t \in [0, T), \tag{18}$$

А программное управление

$$v_k(t) = e^{\lambda_k t} \frac{2\lambda_k}{e^{2\lambda_k T} - 1} q_k^0 \quad t \in [0, T), \tag{19}$$

при этом $q_k(t) = e^{-\lambda_k t} \frac{1}{2\lambda_k} \left(e^{2\lambda_k T} - e^{2\lambda_k t}\right) \frac{2\lambda_k}{e^{2\lambda_k T} - 1} q_k^0 \quad t \in [0, T), \quad q_k(T) = 0.$ Для выбора a_k можно полагать

$$a_k = \frac{2\lambda_k e^{\lambda_k T}}{e^{2\lambda_k T} - 1} \left| q_k^0 \right| \tag{20}$$

и проверить неравенство $\sum a_k \Phi_k \le w^0$.

Справедлива следующая теорема.

Управление вида $v_k(t)$ вида (18) или (19) обеспечивает стабилизацию движения на конечном отрезке времени уравнения (10) при ограничениях (16) и минимизирует функционал (17) при выполнения условия $\sum a_k \Phi_k \le w^0$, где a_k определяется выражением (20).

Примечания:

1. Черноусько Ф.Л. Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами //ППМ. 1992, Т.56, вып.5. С. 810-826.
2. Бияров Т.Н. Устойчивость движения при постоянно действующих возмущениях. Алма-Ата: из-во КазГУ, 1989. 80 с.

УДК 681.5.011

Об одной задаче стабилизации движения на конечном отрезке времени

Сауле Баубековна Беркимбаева

Казахстанско-Британский технический университет, Казахстан
050000, г.Алматы, ул. Толе би, 59
Кандидат физико-математических наук, преподаватель
E-mail: aksu1963@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается управляемая система с распределенными параметрами описываемая уравнениями в частных производных. Предлагается способ управления, который приводит управляемую систему в нулевое состояние за конечное время.

Ключевые слова: программное управление; дифференциальный оператор; граничное условие; стабилизация движения; обратная связь; функционал.