

01.00.00 Physics-mathematics sciences

01.00.00 Физико-математические науки

UDC 62-50.681.3.622

### **The Model and Numerical Algorithm to Research the Filtration Processes in Porous Media Taking Into Account the Phase Transitions of Multicomponent Mixtures**

<sup>1</sup> Normahmad Ravshanov<sup>2</sup> Borat Abilkasimov<sup>3</sup> Nozim Kurbonov

<sup>1</sup> Institute of Mathematics and Information Technologies of NAS, Uzbekistan  
29 Durmon yuli Str., Tashkent, 100125  
Dr. (Technical)

E-mail: ravshanzade-09@mail.ru

<sup>2</sup> Institute of Mathematics and Information Technologies of NAS, Uzbekistan  
29 Durmon yuli Str., Tashkent, 100125  
PhD (Technical), senior research scientist

<sup>3</sup> Institute of Mathematics and Information Technologies of NAS, Uzbekistan  
29 Durmon yuli Str., Tashkent, 100125  
Junior research scientist

E-mail: nozim\_kurbonov@mail.ru

**Abstract.** An adequate mathematical model of process of filtration of gas, oil and water in porous media is developed for analyze the functioning, forecasting and control of hydrocarbons extraction under conditions of artificial influence on layers. The results of numerical computer calculations are presented.

**Keywords:** mathematical model; numerical algorithm; porous media; filtration; gas; oil; water.

Для обеспечения роста производства и нужд народного хозяйства энергоносителями необходимо ускорить время проектирования разработки и ввода в действие новых нефтяных и газовых месторождений, а также обеспечить наиболее полное извлечение продуктов из старых нефтегазовых залежей.

Правильную организацию и решение, выше указанных проблем, невозможно представить без разработки эффективного математического инструмента – «модель, алгоритм и программное средство» для исследований процессов при разнообразных естественных и искусственных условиях воздействия на объект изучения.

Как известно, в нефтепромысловой практике с целью поддержания пластового давления и повышения нефтеотдачи широко используется закачка сухого, попутного газа в нефтяной пласт. Исследование процесса показало, что границы нефтяных залежей связаны с естественными напорами водных пластов, что в некотором смысле повышает энергию разрабатываемого пласта. Тем самым на нефтяную залежь воздействуют силы с двух сторон: с одной стороны – сила закачиваемого газа, с другой стороны – сила напора грунтовых вод.

Поддерживая давление в пласте, эти силы увеличивают время безкомпрессорной эксплуатации. Однако они могут отрицательно влиять на обводнённые эксплуатационные скважины. В связи с этим возникает задача о

необходимости определения значений дебитов эксплуатационных и нагнетательных скважин и их регулировании.

Всё это связано с разработкой математических моделей, адекватно описывающих рассматриваемые процессы и созданием соответствующих алгоритмов и программно-инструментальных средств для проведения вычислительных экспериментов. Математические модели этих сложных процессов, происходящих в пластовых условиях, основаны на методах механики многофазных сред, которые формулируются в виде задач типа Стефана [1].

В настоящее время при моделировании таких процессов используются два принципиально различных подхода. В первом случае строятся модели поршневого вытеснения – с чётким выделением границы вытесняемой и вытесняющей фаз, а во втором строятся модели непоршневого вытеснения без чёткого выделения границы.

Во втором случае, считается, что в каждой точке пласта имеется определённое количество из всех фаз, но некоторые из них имеют насыщенность большую, чем остальные и участвуют в движении, а остальные считаются в среде без движения. Таким образом, образуются зоны чистого газа, смеси нефти-газа-воды, чистой нефти.

Тогда используя законы газогидродинамики можно сформулировать математическую модель процесса воздействия на пласт объёмом газа и продвижения жидкости в пласте, которая приводится к решению следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} = \frac{m\mu_\Gamma}{K_\Gamma P} \frac{\partial P^2}{\partial t}, \quad 0 < x < l \quad t \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[ K \left( \frac{\rho_H K_H}{\mu_H} + \frac{\rho_B K_B}{\mu_B} + \frac{PK_\Gamma}{RTZ\mu_\Gamma} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ m \left( \rho_H S_H + \rho_B S_B + \frac{PS_\Gamma}{RTZ} \right) \right], \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_H \frac{KK_H}{\mu_H} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} m \rho_H S_H, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_B \frac{KK_B}{\mu_B} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} m \rho_B S_B, \\ S_H + S_B + S_\Gamma = 1, \quad l \quad t < x < L \end{cases} \quad (2)$$

$$P \quad x, t = f \quad x, t, \quad L < x < \infty, \quad t > 0. \quad (3)$$

с граничными и внутренними условиями:

$$\frac{\partial P^2}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\alpha q_\Gamma, \quad P_H \quad L, t = P_B \quad L, t, \quad \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{\zeta_i+0} - \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{\zeta_i-0} = \beta q_{ж}. \quad (4)$$

На границе раздела задаются следующие условия

$$\frac{K_\Gamma}{2\rho_\Gamma RTZ} \frac{\partial P^2}{\partial x} \Big|_{x=l \quad t - 0} = K \left( \frac{\rho_H K_H}{\mu_H} + \frac{\rho_B K_B}{\mu_B} + \frac{K_\Gamma P}{RTZ\mu_\Gamma} \right) \frac{\partial P^2}{\partial x} \Big|_{x=l \quad t + 0}, \quad (5)$$

$$m \frac{dl}{dt} = - \frac{K_\Gamma}{\mu_\Gamma} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=l \quad t - 0}, \quad (6)$$

$$P_\Gamma \Big|_{x=l \quad t - 0} = P_H \Big|_{x=l \quad t + 0}. \quad (7)$$

В начале разработки известно распределение давления и насыщенности фазы, а также положение границы раздела фаз

$$\begin{cases} P(x,0) = P_H^0, S_H(x,0) = S_H^0, S_G(x,0) = S_G^0, \\ S_B(x,0) = S_B^0, l(0) = l^0, 0 < x < L. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь  $P(x,t)$  - давление;  $S_G, S_H, S_B$  - насыщенность породы газом, нефтью и водой;  $K$  - абсолютная проницаемость породы;  $K_G, K_H, K_B, \mu_G, \mu_H, \mu_B$  - соответственно фазовые и вязкости газа, нефти и воды;  $P(x,0) = P_H^0, S_G(x,0) = S_G^0, S_H(x,0) = S_H^0, S_B(x,0) = S_B^0$  - соответственно начальное распределение давления, газонасыщенности, нефтенасыщенности и водонасыщенности;  $\rho_G, \rho_H, \rho_B$  - соответственно плотность газа, нефти и воды;  $R$  - газовая постоянная;  $T$  - абсолютная температура;  $Z$  - сжимаемость газа;  $P_H$  - начальное пластовое давление;  $m$  - пористость пласта;  $\zeta_i$  - внутренняя особая точка (нагнетательная или эксплуатационная скважина);  $x = \zeta t$  - граница раздела;  $L$  - длина пласта;  $q_G, q_{ж}$  - соответственно интенсивность работы скважины;  $\alpha, \beta$  - некоторые постоянные величины для приведения в размерность.

Для решения поставленной задачи в уравнениях (1)-(8), используя следующие соотношения:

$$x^* = \frac{x}{L}, l^* = \frac{l t}{L}, P^* = \frac{P}{P_H}, \tau = \frac{\rho_H K_G R T Z}{m \mu_H L^2} t,$$

переходим к безразмерным переменным и отпуская звёздочку над переменными получим математическую модель процесса фильтрации в виде

$$\frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} = \frac{K \rho_H R T Z \mu_G}{K_G P_H \mu_H P} \frac{\partial P^2}{\partial \tau}, 0 < x < \frac{l \tau}{L}, \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} P S_G + B \frac{\partial}{\partial \tau} S_H + B_{BH} + S_B, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( K_H \frac{\partial P}{\partial x} \right) = B \frac{\partial S_H}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( K_B \frac{\partial P}{\partial x} \right) = B \frac{\mu_B}{\mu_H} \frac{\partial S_B}{\partial \tau}, \frac{l \tau}{L} < x < 1 \\ S_H + S_B + S_G = 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$P(x, \tau) = f(x, \tau), 1 < x < \infty, \tau > 0, \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial P^2}{\partial x} \right|_{x=0} = -\alpha \frac{L}{P_H} q_G, \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{\zeta_i+0} - \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{\zeta_i-0} = \beta \frac{L}{P_H} q_{ж}, \quad (12)$$

$$\left. \frac{K_G P_H}{2 \rho_G R T Z} \frac{\partial P^2}{\partial x} \right|_{x=\frac{l \tau}{L}-0} = K \left( \frac{\rho_H K_H}{\mu_H} + \frac{\rho_B K_B}{\mu_B} + \frac{K_G P_H P}{R T Z \mu_G} \right) \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=\frac{l \tau}{L}+0}, \quad (13)$$

$$\frac{dl}{d\tau} = - \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=\frac{l \tau}{L}+0}, P_G \left|_{x=\frac{l \tau}{L}-0} = P_H \left|_{x=\frac{l \tau}{L}+0} \quad (14)$$

$$\begin{cases} P(x,0) = P_H, S_H(x,0) = S_H^0, S_\Gamma(x,0) = S_\Gamma^0, \\ S_B(x,0) = S_B^0, l(0) = l^0, 0 < x < 1. \end{cases} \quad (15)$$

Таким образом, получена замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая функционирование системы «Пласт-скважина», которая состоит из трёх частей: первая описывает функционирование воздействия через нагнетательные скважины, вторая описывает динамику продвижения смеси нефти, воды и газа в пласте, а третья динамику продвижения краевой воды. Для численного решения рассматриваемой задачи применим основные идеи метода выпрямления фазовых фронтов [1-2].

Для решения данной задачи введём новые независимые переменные

$$\xi = \frac{x}{l\tau} \text{ и } \zeta = 1 + \frac{x-l}{1-l}\frac{\tau}{\tau}. \quad (16)$$

Тогда неизвестные функции с учётом зависимости  $\xi$  и  $\zeta$  от  $x$  и  $\tau$ , производя производные, получим следующие выражения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P^2}{\partial \xi^2} = \frac{\lambda l \tau}{P} \left[ l \tau \frac{\partial P^2}{\partial \tau} - l' \tau \xi \frac{\partial P^2}{\partial \xi} \right], 0 < \xi < 1, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( K_H \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) = 1-l \tau \left[ \frac{\partial PS_\Gamma}{\partial \tau} + B \frac{\partial S_H}{\partial \tau} + CS_B \right] - \\ - 1-l \tau \left[ \frac{\partial PS_\Gamma}{\partial \tau} + B \frac{\partial S_H}{\partial \tau} + CS_B \right], \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( K_H \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) = B \left[ \frac{\partial S_H}{\partial \tau} - l' \tau \frac{\partial S_H}{\partial \xi} \right], \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( K_B \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) = B \left[ \frac{\partial S_B}{\partial \tau} - l' \tau \frac{\partial S_B}{\partial \xi} \right], \\ S_\Gamma + S_H + S_B = 1, 0 \leq \zeta \leq 1, P \in [L, T], l \in [0, 1], x \leq L. \end{cases} \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial P^2}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -\alpha_H q_\Gamma, \quad (20)$$

$$\left. \frac{dl}{d\tau} = - \frac{\partial P}{l \tau \partial \xi} \right|_{\xi=l-0}, \quad (21)$$

$$\left. D \frac{\partial P^2}{l \tau \partial \xi} \right|_{\xi=l-0} = \frac{1}{1-l \tau} \left[ K \left( \frac{\rho_H K_H}{\mu_H} + \frac{\rho_B K_B}{\mu_B} + \frac{K_\Gamma P_H P}{RTZ \mu_\Gamma} \right) \right] \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_{\xi=l+0}, \quad (22)$$

$$0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq x \leq l \tau,$$

где  $\lambda = \frac{K \rho_H R Z T \mu_\Gamma}{K_\Gamma P_H \mu_H P}$ ;  $B = \frac{\rho_H R Z T}{P_H}$ ;  $C = \frac{\rho_B}{\rho_H}$ ;  $\alpha_H = \alpha \frac{l \tau L}{P_H}$ ;  $D = \frac{K_\Gamma P_H P}{2 \rho_\Gamma R Z T}$ ;  $P_H$  - начальное распределение функции состояния.

Система уравнений, описывающая сформулированную задачу, нелинейная относительно искомых функций  $l \tau$ ,  $P(x, \tau)$ ,  $S_H(x, \tau)$ ,  $S_B(x, \tau)$ ,  $S_\Gamma(x, \tau)$ . Поэтому получить точное аналитическое решение задачи невозможно. Для её решения применяем метод конечной разности.

Дискретный алгоритм решения задачи (18)-(22) анализа динамических состояний основан на применении интегро-интерполяционного метода, позволяющего построить консервативную разностную схему, которая удовлетворяет закону сохранения в каждом узле пространственно-временной сетки [3].

Для этой цели были проведены многочисленные варианты расчётов на ЭВМ для следующих исходных данных:

$$K = 0,1 \text{ Д}; m = 0,2; P_{\text{H}}^0 = 200 \text{ атм};$$

$$R = 8,31 \text{ Дж (моль } K); T = 273^0 \text{ К}; Z = 1; L = 10000 \text{ м}; \alpha = 20000 \text{ см}^2/\text{с}^3; S_{\text{Г}}^0 = 0,3; S_{\text{H}}^0 = 0,5;$$

$$S_{\text{В}}^0 = 0,2; q_{\text{H}} = 4000 \text{ Т/сутки}; N = 20; \varepsilon = 0,0001.$$

В расчётах основное внимание было ориентировано, при заданных значениях  $\mu_{\text{H}}$ ,  $\mu_{\text{Г}}$  и  $q_{\text{Г}}$ , на то как изменяются граница раздела, скорость изменения границы раздела и давления в узловых точках при двустороннем воздействии на пласт.

На рисунках 1–5 приведена динамика изменения границы раздела соответственно для различных значениях коэффициентов вязкости нефти, газа и  $q_{\text{Г}}$ .

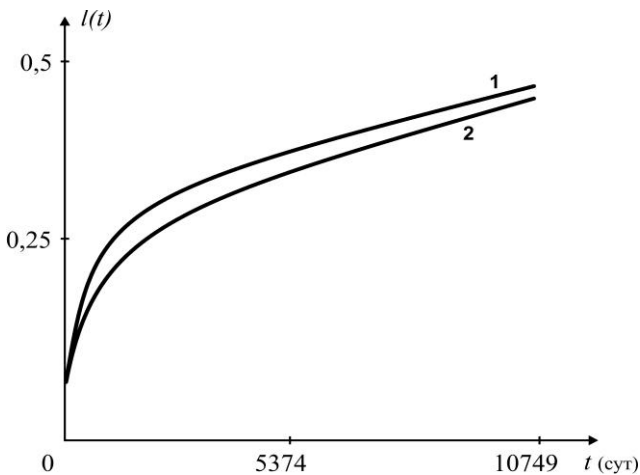


Рис. 1. Динамика изменения границы раздела соответственно для:

1 -  $\mu_{\text{H}} = 3 \text{ сПз}; \mu_{\text{Г}} = 0,2 \text{ сПз}; q_{\text{Г}} = q_{\text{H}}/2,$

2 -  $\mu_{\text{H}} = 1 \text{ сПз}; \mu_{\text{Г}} = 0,06 \text{ сПз}; q_{\text{Г}} = q_{\text{H}}/2.$

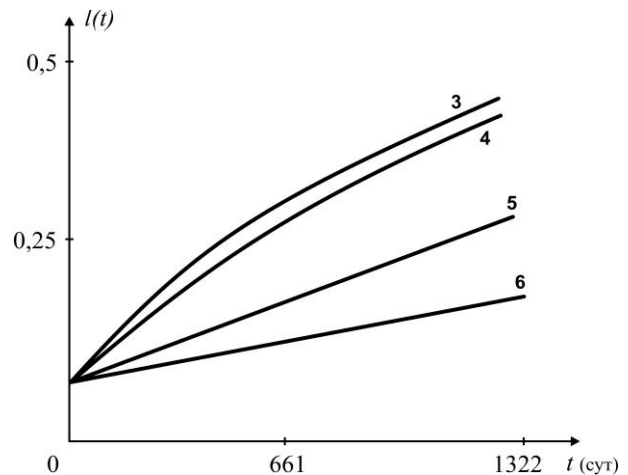


Рис. 2. Динамика изменения границы раздела соответственно для:

3 -  $\mu_{\text{H}} = 10 \text{ сПз}; \mu_{\text{Г}} = 0,06 \text{ сПз}; q_{\text{Г}} = q_{\text{H}}/2,$

4 -  $\mu_{\text{H}} = 50 \text{ сПз}; \mu_{\text{Г}} = 0,06 \text{ сПз}; q_{\text{Г}} = q_{\text{H}}/2,$

5 -  $\mu_{\text{H}} = 100 \text{ сПз}; \mu_{\text{Г}} = 0,06 \text{ сПз}; q_{\text{Г}} = q_{\text{H}}/2,$

6 -  $\mu_{\text{H}} = 1 \text{ сПз}; \mu_{\text{Г}} = 0,14 \text{ сПз}; q_{\text{Г}} = q_{\text{H}}/2.$

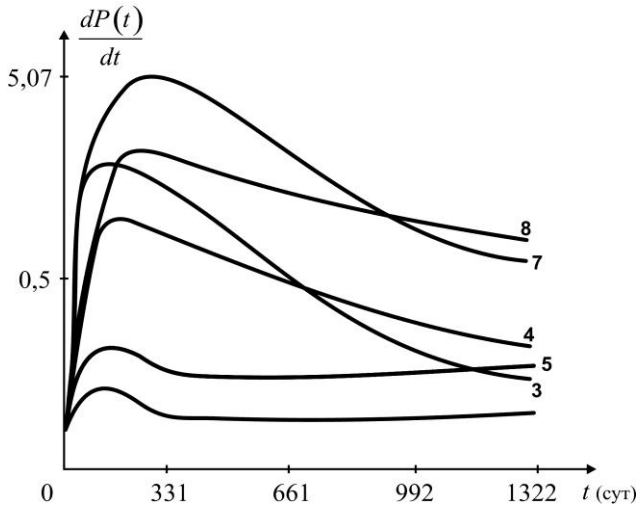


Рис. 3. Динамика изменения скорости продвижения границы раздела соответственно для:  
 3 -  $\mu_H = 10$  сПз;  $\mu_T = 0,06$  сПз;  $q_T = q_H/2$ ,  
 4 -  $\mu_H = 50$  сПз;  $\mu_T = 0,06$  сПз;  $q_T = q_H/2$ ,  
 5 -  $\mu_H = 100$  сПз;  $\mu_T = 0,06$  сПз;  $q_T = q_H/2$ ,  
 7 -  $\mu_H = 10$  сПз;  $\mu_T = 0,14$  сПз;  $q_T = q_H/2$ ,  
 8 -  $\mu_H = 50$  сПз;  $\mu_T = 0,14$  сПз;  $q_T = q_H/2$ .

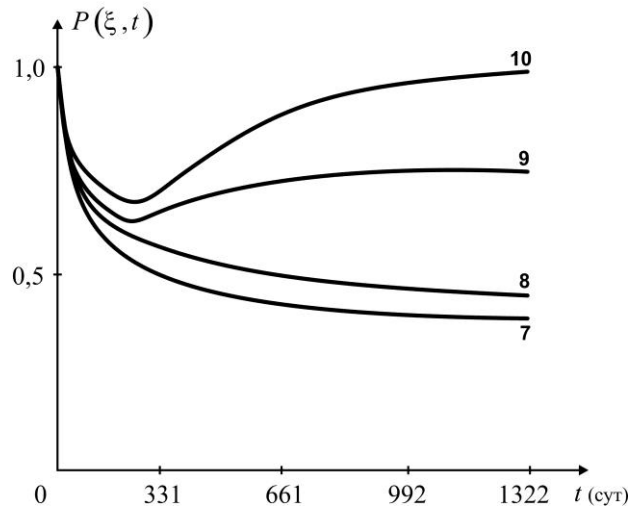


Рис. 4. Динамика изменения давления в соответствующих точках галерей для:  
 7 -  $\mu_H = 10$  сПз;  $\mu_T = 0,14$  сПз;  $q_T = q_H/2$ ,  
 8 -  $\mu_H = 50$  сПз;  $\mu_T = 0,14$  сПз;  $q_T = q_H/2$ ,  
 9 -  $\mu_H = 100$  сПз;  $\mu_T = 0,14$  сПз;  $q_T = q_H/2$ ,  
 10 -  $\mu_H = 1$  сПз;  $\mu_T = 0,14$  сПз;  $q_T = q_H/10$ .

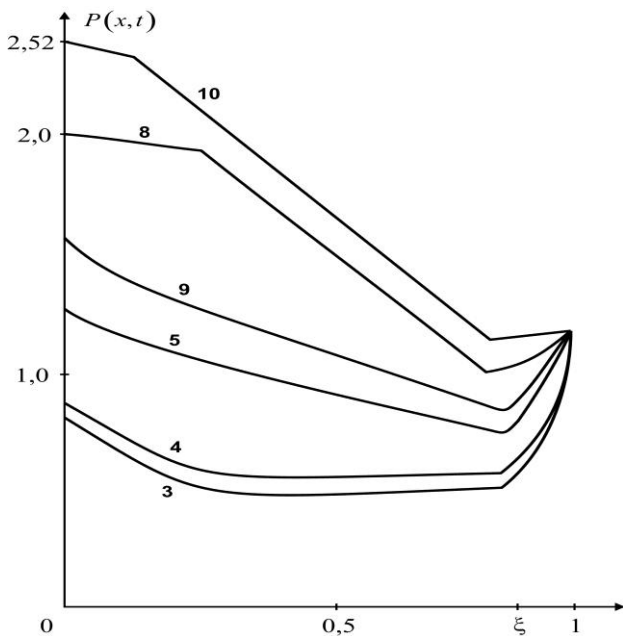


Рис. 5. Изменение давления по протяжённости пласта соответственно для:  
 3 -  $\mu_H = 10$  сПз;  $\mu_T = 0,06$  сПз;  $q_T = q_H/2$ ,  
 4 -  $\mu_H = 50$  сПз;  $\mu_T = 0,06$  сПз;  $q_T = q_H/2$ ,  
 5 -  $\mu_H = 100$  сПз;  $\mu_T = 0,06$  сПз;  $q_T = q_H/2$ ,  
 8 -  $\mu_H = 50$  сПз;  $\mu_T = 0,14$  сПз;  $q_T = q_H/2$ ,  
 9 -  $\mu_H = 100$  сПз;  $\mu_T = 0,14$  сПз;  $q_T = q_H/2$ ,  
 10 -  $\mu_H = 1$  сПз;  $\mu_T = 0,14$  сПз;  $q_T = q_H/10$ .

Приведённые результаты вычислительных экспериментов для различных коэффициентов вязкости нефти и газа, а также закачки газа показывают, что в рассматриваемых условиях изменение темпа закачки газа в пласт, существенно не влияет на процесс падения давления в ряде скважин. По-видимому это объясняется тем, что скважина находится ближе к контуру питания.

Скорость падения давления на галерее при больших вязкостях нефти всё быстрее по времени, а при небольших вязкостях нефти – сначала быстрее, достигая некоторого небольшого значения, затем начинает падать.

Результаты, приведённые в графиках, подтверждают правильность изменения падения давления и скорости изменения согласно гидродинамическим законам взаимосвязанных систем.

Анализ вычислительных экспериментов при широких изменениях фильтрационных параметров для решения различных тестовых задач, показывает адекватность построенных математических моделей, сходимость и устойчивость построенных алгоритмов.

Разработанные математические модели, вычислительные алгоритмы и программный комплекс могут быть использованы для анализа функционирования, оперативного управления и прогнозирования разработки нефтегазовых месторождений при различных условиях воздействия на пласт и принятия конкретных практических рекомендаций.

#### **Примечания:**

1. Будаков Б.М. Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана / Б.М. Будаков, Ф.П. Васильев, А.Б. Успенский // Численные методы газовой динамике : сб. работ ВЦ МГУ. М., 1987. С.

2. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана / Л.И. Рубинштейн. Рига, 1967. 457 с.

3. Самарский А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабишевич. М., 2003. 784 с.

UDC 62-50.681.3.622

### **Модель и численный алгоритм для исследования фильтрационных процессов в пористых средах с учетом фазовых переходов многокомпонентных смесей**

<sup>1</sup> Нормухмад Равшанов

<sup>2</sup> Борат Абилкасимов

<sup>3</sup> Нозим Курбонов

<sup>1-3</sup> Институт математики и информационных технологий АН РУз, Узбекистан  
ул. Дурмон йули 29, Ташкент, 100125

<sup>1</sup> Доктор технических наук, заведующий лабораторией  
E-mail: ravshanzade-09@mail.ru

<sup>2</sup> Кандидат технических наук, старший научный сотрудник

<sup>3</sup> Младший научный сотрудник  
E-mail: nozim\_kurbonov@mail.ru

**Аннотация.** Разработана адекватная математическая модель процесса фильтрации газа, нефти и воды в пористых средах для анализа функционирования, прогнозирования и управления добычей углеводородов в условиях искусственного воздействия на пластах. Приведены результаты проведённых численных расчетов на ЭВМ.

**Ключевые слова:** математическая модель; численный алгоритм; пористая среда; фильтрация; газ; нефть; вода.