UDC 519.23

A PROBLEM OF IDENTIFIABILITY AND POLYNOMIAL INVARIANTS FOR FACTOR ANALYSIS MODELS

Sergei V. Stafeev

Karelian Research Center of the Russian Academy of Sciences
185910, Petrozavodsk, Pushkinskaya str., 11
PhD (Physics and mathematics)
E-mail: staf@sampo.ru

A connection between a problem of parametrical identifiability and polynomial invariants for factor analysis model with dependent residuals is considered.

Keywords: factor analysis, latent variables, polynomial invariants, identifiability.

Мы рассматриваем следующую модель факторного анализа:

$$X_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} H_j + Y_i, \quad i = 1,\dots,n, \qquad (1)$$

где $\mathbf{X} = \{X_1,\dots,X_n\}^t$ – вектор наблюдаемых случайных величин с матрицей ковариаций $\Sigma = (\sigma_{ij})$; $\mathbf{H} = \{H_1,\dots,H_k\}^t$ – множество независимых в совокупности латентных (ненаблюдаемых) случайных величин (факторов), имеющих стандартное нормальное распределение; $A = (a_{ij})$ – матрица факторных нагрузок. Вектор остатков $\mathbf{Y} = \{Y_1,\dots,Y_k\}^t$ имеет нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей ковариаций $\Theta = (\theta_{ij})$. Векторы $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{H}$ являются независимыми. Взаимосвязь компонент вектора $\mathbf{Y}$ представляется ковариационной графовой моделью [1] со структурой $G = (V, E)$, где $V = \{1,\dots,n\}$, а $E = \{(i,j) \mid i \neq j, \theta_{ij} \neq 0\}$.

Матрица ковариаций наблюдаемых случайных величин Σ допускает следующее представление:

$$\Sigma = AA^t + \Theta. \qquad (2)$$

Пусть P_G^k – множество всех положительно определенных матриц, допускающих разложение (2), и пусть $f(\Sigma)$ – полином, зависящий от элементов σ_{ij} матрицы Σ. Полином $f(\Sigma)$ называется полиномиальным инвариантом модели (1), если $f(\Sigma) = 0$ для всех матриц $\Sigma \in \mathrm{P}_G^k$ [2]. Множество всех инвариантов модели (1) образует идеал $I_{k,n}^G$ кольца многочленов $\mathbf{R}[\sigma_{ij}, i < j, (i,j) \notin E]$.

Пусть $\overline{G} = (V, \overline{E})$ – дополнительный для G граф. Определим граф $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, состоящий из множества вершин $\mathbf{V} = \{\mathbf{i} = (i_1,\dots,i_k), 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le k\}$ и множества ребер $\mathbf{E} = \{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \mid \mathbf{i} = (i_1,\dots,i_k), \mathbf{j} = (j_1,\dots,j_k), (i_s, j_l) \in \overline{E}, s,l = 1,\dots,k\}$. Каждому ребру графа $\mathbf{G}$ сопоставим в соответствие детерминант $|\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|$ матрицы $\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}} = (\sigma_{i_m, j_l})_{m,l=1}^k$. Данный $k \times k$ минор матрицы Σ будем называть весом ребра. В работах [3, 4] показано, что идеал $I_{k,n}^G$ инвариантов модели (1) содержит полиномы, соответствующими подграфам графа $\mathbf{G}$, которые являются либо простыми четными циклами, либо графами, состоящими из двух простых нечетных циклов соединенных простой цепью.

Заметим, что для элементов матрицы Σ кроме ограничений в виде равенств (инвариантов), справедливы также ограничения в виде неравенств. Пусть $C=(V_C,E_C)$ простой цикл графа $\mathbf{G}$. Верно следующее неравенство:

$$\prod_{(\mathbf{i},\mathbf{j})\in E_C}|\Sigma_{\mathbf{i},\mathbf{j}}|\geq 0\,.$$

Модель (1) называется идентифицируемой, если по матрице ковариаций наблюдаемых случайных величин Σ матрица Θ определяется однозначно, а матрица факторных нагрузок A с точностью до ортогонального вращения. Отсутствие идентифицируемости приводит к невозможности состоятельного оценивания параметров модели. В работе [1] были получены достаточные условия почти всюду идентифицируемости модели (1). Используя граф $\mathbf{G}$ можно сформулировать достаточные условия глобальной идентифицируемости, рассматриваемой нами модели.

Теорема. Модель (1) является идентифицируемой, если каждая компонента связности графа, полученного из графа $\mathbf{G}$ с помощью удаления ребер, соответствующих нулевым весам, содержит по крайней мере один простой нечетный цикл.

Примечания:

1. Стафеев С.В. О модели факторного анализа с зависимыми остатками // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1058–1064.

2. Drton M., Sturmfels B., Sullivant S. Algebraic factor analysis: tetrads, pentads and beyond // Probability Theory and Related Fields. 2007. Vol. 138. P. 463–493.

3. Стафеев С. В. Полиномиальные инварианты для моделей с латентными переменными // Труды Карельского научного центра Российской академии наук. 2010. № 3. С. 83-86.

4. Stafeev S. On the method for finding invariants of factor analysis models // Computer Data Analysis and Modeling. Proceedings of the Ninth International Conference, v.1. Minsk, 2010. P. 211-214.

УДК 519.23

ПРОБЛЕМА ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

Сергей Вячеславович Стафеев

Учреждение Российской академии наук Карельский научный центр РАН
185910, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
Кандидат физико-математических наук
E-mail: staf@sampo.ru

В статье рассматривается связь между проблемой параметрической идентифицируемости и полиномиальными инвариантами для модели факторного анализа с зависимыми остатками.

Ключевые слова: факторный анализ, латентные переменные, полиномиальные инварианты, идентифицируемость.